Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 469370 10 gennaio 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro.
Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	b
3	c
4	a
5	d
6	d
7	d
8	b
9	c
10	b

1. Il polinomio di Taylor al terzo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^x - \cos x$ è:

(a) $2 + x - x^2 + \frac{x^3}{6}$ (b) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (c) $1 - \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^3 x}{6}$ ► (d) $x + x^2 + \frac{x^3}{6}$

Soluzione:

$f(x) = e^x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$

$= \cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Poiché il polinomio di Taylor di ordine 3 è l'unico polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a 3 tale che $f(x) = p(x) + o(x^3)$ per $x \to 0$, otteniamo che

$p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6}$.

2. La funzione $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right)$

(a) è limitata ma non ha né massimo né minimo

► (b) ha sia massimo che minimo

(c) non è limitata

(d) ha massimo ma non ha minimo

Soluzione:

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \qquad f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$

La funzione è pari, quindi possiamo studiarla solo su $(0, +\infty)$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \cdot \text{limitata} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^4}\left(1 + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 0$

La funzione è continua, quindi possiamo applicare il teorema di Weierstrass generalizzato.

Osserviamo che $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(\pi) = 0$

Dato che $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\right) \geq 0$ otteniamo che f ha massimo, ma $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\right) \leq 0$ quindi f ha anche minimo.

3. $\lim_{x \to \infty} \int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\, dt =$

(a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(b) $+\infty$

► (c) $\frac{7}{3\sqrt{2}}$

(d) $\frac{11}{4\sqrt{2}}$

Soluzione:

$$\int \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{t}{t^2\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{1}{t^{3/2}}\,dt + \int \frac{1}{t^{5/2}}\,dt =$$

$$= -2\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\frac{1}{t\sqrt{t}} + c$$

$$\int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\frac{1}{t\sqrt{t}}\right]_2^x = \frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\cancel{2}}{3}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{6+1}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}.$$

4. Sia $F(x) = \int\limits_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$. Allora $F'(1) =$

► (a) $2e - e^2$ (b) $e - \frac{e^2}{2}$ (c) $3e^{\frac{1}{3}} - e$ (d) 0

Soluzione:

Ricordando che $\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$

otteniamo

$$F'(x) = \frac{e^{x^2}}{x^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{x} - \frac{e^{2x}}{\cancel{2}x}\cdot\cancel{2} = \frac{2e^{x^2} - e^{2x}}{x}$$

$$F'(1) = 2e - e^2.$$

5. La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$

(a) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

(b) ha un asintoto verticale e non ha asintoti orizzontali

(c) ha un asintoto orizzontale e non ha asintoti verticali

► (d) non ha nessun tipo di asintoto

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t} \qquad F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$$

valutiamo quindi la convergenza dell'integrale improprio.

Poniamo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$ e osserviamo che $f(t) \geq 0$ $\forall t \in (0, +\infty)$. Scegliamo $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ e utilizziamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + \sin^2 t} = 1 .$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = +\infty$ otteniamo che $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = +\infty$

quindi $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ e non c'è asintoto orizzontale.

Osserviamo ora che F è continua in $(0, +\infty)$ quindi potrebbe esserci un asintoto verticale solo in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_1^0 f(t)\, dt = -\int_0^1 f(t)\, dt$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\sin t = t + o(t^2)$ per ottenere che, per $t \to 0$

$$f(t) = \frac{1}{t^{1/2} + (t + o(t^2))^2} = \frac{1}{t^{1/2} + t^2 (1 + o(t))^2} =$$

$$= \frac{1}{t^{1/2}} \frac{1}{1 + t^{3/2} (1 + o(t))^2}$$

Scegliamo quindi $g(t) = \frac{1}{t^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^{1/2}}}{\cancel{t^{1/2}}} \frac{1}{1+t^{3/2}(1+o(t))^3} = 1.$$

Poiché $\int_0^1 g(t)\,dt$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge, quindi $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ è finito, quindi F non ha asintoti verticali.

6. Sia $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $\quad x \neq 0$. Allora

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste

(b) $\displaystyle\int_0^3 |f(x)|\,dx$ converge

(c) $\displaystyle\int_3^{200} f(x)\,dx$ non converge

► (d) $\displaystyle\int_7^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

per $x \to \infty$ $\quad \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ $\quad$ e $\displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge

Per il criterio del confronto $\displaystyle\int_7^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ converge

quindi $\displaystyle\int_7^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente, pertanto converge.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n\,(1-\cos(n\pi)))^{n\cos(n\pi)} =$

(a) 1 $\qquad$ (b) non esiste $\qquad$ (c) $+\infty$ $\qquad$ ► (d) 0

Soluzione:

Poniamo $a_n = \left(n\left(1-\cos(n\pi)\right)\right)^{n\cos(n\pi)}$

e ricordiamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi

$a_n = \left(n\left(1-(-1)^n\right)\right)^{n(-1)^n}$.

Esaminiamo ora la sottosuccessione di indici pari

$a_{2n} = \left(2n\left(1-(-1)^{2n}\right)\right)^{2n(-1)^{2n}} = \left(2n(1-1)\right)^{2n} = 0$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$.

Vediamo ora gli indici dispari

$a_{2n+1} = \left((2n+1)\left(1-(-1)^{2n+1}\right)\right)^{(2n+1)(-1)^{2n+1}} = \left((2n+1)\cdot 2\right)^{-(2n+1)} =$

$= \dfrac{1}{\left(2(2n+1)\right)^{2n+1}}$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$.

Dato che le due sottosuccessioni saturano tutti gli indici

otteniamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

8. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{5^n\,(n(-2)^n-1)}{2^n(n^3 5^n+1)}$

(a) diverge negativamente

► (b) converge assolutamente

(c) diverge positivamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \dfrac{5^n(n(-2)^n - 1)}{2^n(n^3 5^n + 1)}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{5^n(-2)^n\left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{2^n \cdot 5^n\left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)} = (-1)^n \frac{\cancel{10^n}\left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{\cancel{10^n}\left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)}$$

Dato che $n - \frac{1}{(-2)^n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la serie è a segni alterni.

Verifichiamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{n - \frac{1}{(-2)^n}}{n^3 + \frac{1}{5^n}} = \frac{n\left(1 - \frac{1}{n(-2)^n}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^3 5^n}\right)} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}}\right)$$

Osserviamo ora che $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n(-2)^n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

quindi anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(-2)^n} = 0$. Allora, scegliendo $b_n = \frac{1}{n^2}$

otteniamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

Dato che $\sum_n b_n$ converge, dal criterio del confronto asintotico, $\sum_n |a_n|$ converge, quindi $\sum_n a_n$ converge assolutamente.

9. La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{2 + \cos x + \cos y}$, nel suo insieme di definizione

(a) non è limitata né inferiormente né superiormente

(b) è limitata superiormente ma non inferiormente

► (c) è limitata inferiormente ma non superiormente

(d) è limitata

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{2+\cos x+\cos y}$$

Osserviamo che $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \cos y \le 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

quindi $2+\cos x+\cos y \ge 2-1-1=0$, ne segue che

$f(x,y)>0$ nel suo insieme di definizione, quindi

f è limitata inferiormente.

Scegliamo ora un punto dove il denominatore si annulla, ad esempio (π,π) e consideriamo la restrizione di f alla retta orizzontale $y=\pi$

$$f(x,\pi) = \frac{1}{2+\cos x+\cos \pi} = \frac{1}{1+\cos x}$$

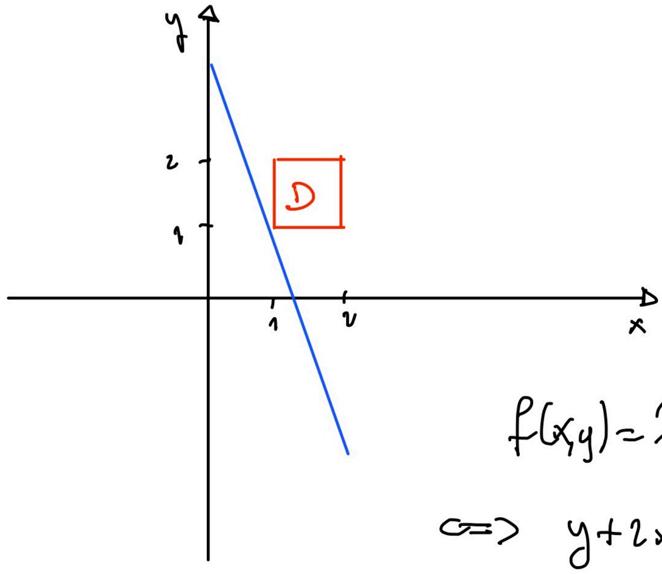
Poichè $\lim\limits_{x\to\pi} f(x,\pi) = \lim\limits_{x\to\pi} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

otteniamo che f non è limitata superiormente.

10. Il minimo della funzione $f(x,y) = e^{y+2x}$ sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$ vale

(a) e^6 ▶ (b) e^3 (c) e^4 (d) e^5

Soluzione:



Il dominio è un quadrato di lato 1 con i bordi compresi.

Cerchiamo gli insiemi di livello di f.

$$f(x,y)=\lambda \iff e^{y+2x}=\lambda$$

$$\iff y+2x=\log\lambda \quad (\lambda>0).$$

Quindi l'insieme di livello λ è la retta di equazione

$$y=-2x+\log\lambda.$$

Al crescere di λ la retta interseca l'asse y sempre più in alto quindi il minimo corrisponderà alla retta "più bassa" che interseca D. Il punto di intersezione sarà quindi $(1,1)$ e

$$\min(f)=f(1,1)=e^{1+2}=e^{3}.$$

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 285477 10 gennaio 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	b
3	b
4	b
5	d
6	b
7	a
8	c
9	a
10	d

1. Il polinomio di Taylor al terzo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^x - \cos x$ è:

► (a) $x + x^2 + \frac{x^3}{6}$ (b) $2 + x - x^2 + \frac{x^3}{6}$ (c) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (d) $1 - \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^3 x}{6}$

Soluzione:

$$f(x) = e^x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= \cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Poiché il polinomio di Taylor di ordine 3 è l'unico polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a 3 tale che $f(x) = p(x) + o(x^3)$ per $x \to 0$, otteniamo che

$$p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

2. La funzione $f(x) = x + e^{-x}$

(a) ha un asintoto orizzontale

► (b) ha un asintoto obliquo

(c) ha un asintoto verticale

(d) non ha asintoti

Soluzione:

$$f(x) = x + e^{-x}$$

f è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ed è continua.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + e^{+\infty} = ?$ Sostituisco $t = -x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} -t + e^{t} = \lim_{t\to\infty} e^{t}\left(1 - \frac{t}{e^{t}}\right) = \infty(1-0) = \infty.$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{t\to+\infty} 1 + \frac{e^{t}}{-t} = -\infty$

quindi non c'è né asintoto orizzontale né obliquo per $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} x + e^{-x} = +\infty + e^{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty.$

quindi non c'è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} =$

$= 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 + \frac{e^{-\infty}}{\infty} = 1 + \frac{0}{\infty} = 1 + 0 = 1 = m$

$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \cancel{x} + e^{-x} - \cancel{1 \cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\infty} = 0 = q$

Quindi $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.

3. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \int_{2}^{x} \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\, dt =$

(a) $+\infty$ ► (b) $\dfrac{7}{3\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{11}{4\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Soluzione:

$$\int \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{t}{t^2\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{1}{t^{3/2}}\,dt + \int \frac{1}{t^{5/2}}\,dt =$$

$$= -2\,\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{t\sqrt{t}} + c$$

$$\int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{t\sqrt{t}}\right]_2^x = \frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\cancel{2}}{3}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{6+1}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}.$$

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x-3}\,dx =$

(a) $1+\log 16$ ► (b) $1-4\log 2$ (c) non esiste (d) $\log 3$

Soluzione:

$$\int \frac{x+1}{x-3}\,dx = \int \frac{x-3+3+1}{x-3}\,dx =$$

$$= \int \frac{x-3}{x-3}\,dx + \int \frac{4}{x-3}\,dx = \int 1\,dx + 4\int \frac{dx}{x-3} = x + 4\log|x-3| + c$$

Quindi

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x-3}\,dx = \Big[x + 4\log|x-3|\Big]_1^2 = 2 + 4\log|2-3| - \big(1 + 4\log|1-3|\big) =$$

$$= 2 + \cancel{4\log 1} - 1 - 4\log 2 = 1 - 4\log 2$$

5. La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$

(a) ha un asintoto orizzontale e non ha asintoti verticali

(b) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

(c) ha un asintoto verticale e non ha asintoti orizzontali

► (d) non ha nessun tipo di asintoto

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t} \qquad F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$$

valutiamo quindi la convergenza dell'integrale improprio.

Poniamo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$ e osserviamo che $f(t) \geq 0$ $\forall\, t \in (0, +\infty)$. Scegliamo $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ e utilizziamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + \sin^2 t} = 1.$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = +\infty$ otteniamo che $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = +\infty$

quindi $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ e non c'è asintoto orizzontale.

Osserviamo ora che F è continua in $(0, +\infty)$ quindi potrebbe esserci un asintoto verticale solo in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_1^0 f(t)\, dt = -\int_0^1 f(t)\, dt$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\sin t = t + o(t^2)$ per ottenere che, per $t \to 0$

$$f(t) = \frac{1}{t^{1/2} + (t + o(t^2))^2} = \frac{1}{t^{1/2} + t^2 (1 + o(t))^2} =$$

$$= \frac{1}{t^{1/2}} \frac{1}{1 + t^{3/2} (1 + o(t))^2}$$

Scegliamo quindi $g(t) = \frac{1}{t^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^{1/2}}}{\cancel{t^{1/2}}} \frac{1}{2+t^{3/2}(1+o(t))^3} = 1 .$$

Poiché $\int_0^1 g(t)\,dt$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge, quindi $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ è finito, quindi F non ha asintoti verticali.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{(x^2)}\sin x}{\sqrt{x}\,\log(1+x)}\,dx$

(a) non esiste ► (b) converge (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2}\sin x}{\sqrt{x}\,\log(1+x)}\,dx$$

$e^{x^2} > 0$ sempre $\quad \sin x \geq 0$ se $x \in [0,1]$, $\log(1+x) \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$.

confronto asintotico. $\boxed{x \to 0}$

$\sin x = x + o(x^2)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

$$\frac{e^{x^2}\sin x}{\sqrt{x}\,\log(1+x)} = \frac{e^{x^2}(x+o(x^2))}{x^{1/2}\,(x+o(x))} =$$

$$= e^{x^2}\frac{\cancel{x}(1+o(x))}{x^{1/2}\,\cancel{x}(1+o(1))} = e^{x^2}\frac{1+o(x)}{x^{1/2}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1/2}}\,\underbrace{\boxed{e^{x^2}\frac{1+o(x)}{1+o(1)}}}_{\downarrow\, 1}$$

definisco $g(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}}$ e ottengo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \text{ converge.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge.}$$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n\,(1-\cos(n\pi)))^{n\cos(n\pi)} =$

► (a) 0 (b) $+\infty$ (c) 1 (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $a_n = \left(n\left(1-\cos(n\pi)\right)\right)^{n\cos(n\pi)}$

e ricordiamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi

$a_n = \left(n\left(1-(-1)^n\right)\right)^{n(-1)^n}$.

Esaminiamo ora la sottosuccessione di indici pari

$a_{2n} = \left(2n\left(1-(-1)^{2n}\right)\right)^{2n(-1)^{2n}} = \left(2n(1-1)\right)^{2n} = 0$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$.

Vediamo ora gli indici dispari

$a_{2n+1} = \left((2n+1)\left(1-(-1)^{2n+1}\right)\right)^{(2n+1)(-1)^{2n+1}} = \left((2n+1)\cdot 2\right)^{-(2n+1)} =$

$= \dfrac{1}{\left(2(2n+1)\right)^{2n+1}}$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$.

Dato che le due sottosuccessioni saturano tutti gli indici

otteniamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

8. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{5^n\left(n(-2)^n-1\right)}{2^n(n^3 5^n+1)}$

(a) diverge negativamente

(b) converge ma non converge assolutamente

► (c) converge assolutamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \dfrac{5^n (n(-2)^n - 1)}{2^n (n^3 5^n + 1)}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{5^n (-2)^n \left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{2^n \cdot 5^n \left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)} = (-1)^n \frac{\cancel{10^n} \left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{\cancel{10^n} \left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)}$$

Dato che $n - \frac{1}{(-2)^n} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, la serie è a segni alterni.

Verifichiamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{n - \frac{1}{(-2)^n}}{n^3 + \frac{1}{5^n}} = \frac{n \left(1 - \frac{1}{n(-2)^n}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3 5^n}\right)} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}} \right)$$

Osserviamo ora che $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{n(-2)^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n 2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

quindi anche $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n(-2)^n} = 0$. Allora, scegliendo $b_n = \frac{1}{n^2}$

otteniamo che $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$

Dato che $\sum_n b_n$ converge, dal criterio del confronto asintotico, $\sum_n |a_n|$ converge, quindi $\sum_n a_n$ converge assolutamente.

9. La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{2 + \cos x + \cos y}$, nel suo insieme di definizione

► (a) è limitata inferiormente ma non superiormente (b) è limitata

(c) non è limitata né inferiormente né superiormente (d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{2+\cos x+\cos y}$$

Osserviamo che $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \cos y \le 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

quindi $2+\cos x+\cos y \ge 2-1-1=0$, ne segue che

$f(x,y)>0$ nel suo insieme di definizione, quindi

f è limitata inferiormente.

Scegliamo ora un punto dove il denominatore si annulla, ad esempio (π,π) e consideriamo la restrizione di f alla retta orizzontale $y=\pi$

$$f(x,\pi) = \frac{1}{2+\cos x+\cos\pi} = \frac{1}{1+\cos x}$$

Poichè $\lim_{x\to\pi} f(x,\pi) = \lim_{x\to\pi} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

otteniamo che f non è limitata superiormente.

10. La funzione $f(x,y) = \dfrac{y^6+x^4}{y^4x^3}$

(a) è inferiormente limitata ma non ha minimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo

► (d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$f(x,y)=\frac{y^6+x^4}{y^4x^3}$$

consideriamo la restrizione alla curva $\gamma(t)=(1,t)$

$$g(t)=f(1,t)=\frac{t^6+1}{t^4}$$

e osserviamo che $\lim_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$

quindi f non ha massimo.

Consideriamo ora la restrizione alla curva $\alpha(t)=(-1,t)$

$$h(t)=f(-1,t)=\frac{t^6+1}{-t^4}$$

e $\lim_{t\to+\infty} h(t)=-\infty$

quindi f non ha minimo.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 238127 10 gennaio 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	a
3	b
4	d
5	a
6	a
7	b
8	d
9	c
10	c

1. Il polinomio di Taylor al terzo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^x - \cos x$ è:

(a) $1 - \dfrac{\cos^2 x}{2} + \dfrac{\cos^3 x}{6}$ ► (b) $x + x^2 + \dfrac{x^3}{6}$ (c) $2 + x - x^2 + \dfrac{x^3}{6}$ (d) $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$

Soluzione:

$$f(x) = e^x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= \cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Poiché il polinomio di Taylor di ordine 3 è l'unico polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a 3 tale che $f(x) = p(x) + o(x^3)$ per $x \to 0$, otteniamo che

$$p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ è

► (a) di classe C^2 (b) non derivabile

(c) non limitata (d) prolungabile per continuità in $x = 0$

Soluzione:

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

La funzione è composizione delle funzioni $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(t) = \sin t$ entrambe derivabili infinite volte, pertanto f è derivabile infinite volte, quindi, in particolare, è di classe C^2.

Anche se non è necessario, calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x) = \left(\cos \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = \left(-\sin \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right).$$

3. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\, dt =$

(a) $\dfrac{11}{4\sqrt{2}}$ ► (b) $\dfrac{7}{3\sqrt{2}}$ (c) $+\infty$ (d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Soluzione:

$$\int \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{t}{t^2\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{1}{t^{3/2}}\,dt + \int \frac{1}{t^{5/2}}\,dt =$$

$$= -2\,\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{t\sqrt{t}} + c$$

$$\int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{t\sqrt{t}}\right]_2^x = \frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\cancel{2}}{3}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{6+1}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}\,.$$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\log(\cos x))\tan x\,dx =$

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \dfrac{\pi}{4}$

(b) $\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\left(\log\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $\cos\left(\log\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

► (d) $\sin\left(\dfrac{\log 2}{2}\right)$

Soluzione:

Calcoliamo prima l'integrale indefinito utilizzando due sostituzioni.

$$\int \cos(\log(\cos x))\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \int \cos(\log(\cos x))\frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$$

$\cos x = t$, $\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin x\,dx = -dt$

$$= -\int \cos(\log t)\cdot\frac{1}{t}\,dt =$$

$y = \log t$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}$, $dy = \dfrac{dt}{t}$

$$= -\int \cos y\,dy = -\sin y + c = -\sin(\log t) + c = -\sin(\log(\cos x)) + c$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\log(\cos x))\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \Big[-\sin(\log(\cos x))\Big]_0^{\pi/4} =$$

$$= -\sin\left(\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin(\log(\cos 0)) =$$

$$= -\sin\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sin(\log 1) = -\sin\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cancel{\sin 0} =$$

$$= -\sin\left(\log\left(2^{-1/2}\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \sin\left(\frac{\log 2}{2}\right)$$

5. La funzione $F:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin^2 t}$

► (a) non ha nessun tipo di asintoto

(b) ha un asintoto orizzontale e non ha asintoti verticali

(c) ha un asintoto verticale e non ha asintoti orizzontali

(d) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t} \qquad F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$$

valutiamo quindi la convergenza dell'integrale improprio.

Poniamo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$ e osserviamo che $f(t) \geq 0$ $\forall\, t \in (0, +\infty)$. Scegliamo $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ e utilizziamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + \sin^2 t} = 1.$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = +\infty$ otteniamo che $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$

quindi $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ e non c'è asintoto orizzontale.

Osserviamo ora che F è continua in $(0, +\infty)$ quindi potrebbe esserci un asintoto verticale solo in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_1^0 f(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)\,dt$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\sin t = t + o(t^2)$ per ottenere che, per $t \to 0$

$$f(t) = \frac{1}{t^{1/2} + \left(t + o(t^2)\right)^2} = \frac{1}{t^{1/2} + t^2\left(1 + o(t)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{t^{1/2}} \frac{1}{1 + t^{3/2}\left(1 + o(t)\right)^2}$$

Scegliamo quindi $g(t) = \frac{1}{t^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^{1/2}}}{\cancel{t^{1/2}}} \frac{1}{1+t^{3/2}(1+o(t))^3} = 1 .$$

Poiché $\int_0^1 g(t)\,dt$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge, quindi $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ è finito, quindi F non ha asintoti verticali.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x+\sqrt{x}}\,dx$

► (a) converge (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \qquad . \qquad \text{Sia} \quad f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x+\sqrt{x}} \,.$$

$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in (0, +\infty)$ e f non è definita per $x = 0$.

Osserviamo che

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} \,. \qquad \text{Scegliamo } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ e osserviamo}$$

che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\,(1+\sqrt{x})} \cdot \cancel{\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{arctg}(+\infty)}{1+0} = \pi/2 \,.$

Dato che $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Vediamo per $x \to +\infty$.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{x}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{x^2}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\cancel{x^2}}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \cancel{x^2} = 1 \,.$$

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n\,(1-\cos(n\pi))\right)^{n\cos(n\pi)} =$

(a) $+\infty$ ▶ (b) 0 (c) 1 (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $a_n = \left(n\left(1-\cos(n\pi)\right)\right)^{n\cos(n\pi)}$

e ricordiamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi

$a_n = \left(n\left(1-(-1)^n\right)\right)^{n(-1)^n}$.

Esaminiamo ora la sottosuccessione di indici pari

$a_{2n} = \left(2n\left(1-(-1)^{2n}\right)\right)^{2n(-1)^{2n}} = \left(2n(1-1)\right)^{2n} = 0$

quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$.

Vediamo ora gli indici dispari

$a_{2n+1} = \left((2n+1)\left(1-(-1)^{2n+1}\right)\right)^{(2n+1)(-1)^{2n+1}} = \left((2n+1)\cdot 2\right)^{-(2n+1)} =$

$= \dfrac{1}{\left(2(2n+1)\right)^{2n+1}}$

quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$.

Dato che le due sottosuccessioni saturano tutti gli indici

otteniamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

8. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{5^n\left(n(-2)^n-1\right)}{2^n(n^3 5^n+1)}$

(a) converge ma non converge assolutamente

(b) diverge negativamente

(c) diverge positivamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \dfrac{5^n(n(-2)^n - 1)}{2^n(n^3 5^n + 1)}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{5^n(-2)^n\left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{2^n \cdot 5^n\left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)} = (-1)^n \frac{\cancel{10^n}\left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{\cancel{10^n}\left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)}$$

Dato che $n - \frac{1}{(-2)^n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la serie è a segni alterni.

Verifichiamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{n - \frac{1}{(-2)^n}}{n^3 + \frac{1}{5^n}} = \frac{n\left(1 - \frac{1}{n(-2)^n}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^3 5^n}\right)} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}}\right)$$

Osserviamo ora che $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n(-2)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$ quindi anche $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(-2)^n} = 0$. Allora, scegliendo $b_n = \frac{1}{n^2}$ otteniamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

Dato che $\sum_n b_n$ converge, dal criterio del confronto asintotico, $\sum_n |a_n|$ converge, quindi $\sum_n a_n$ converge assolutamente.

9. La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{2 + \cos x + \cos y}$, nel suo insieme di definizione

(a) è limitata

(b) è limitata superiormente ma non inferiormente

► (c) è limitata inferiormente ma non superiormente

(d) non è limitata né inferiormente né superiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{2+\cos x+\cos y}$$

Osserviamo che $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \cos y \le 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

quindi $2+\cos x+\cos y \ge 2-1-1=0$, ne segue che

$f(x,y)>0$ nel suo insieme di definizione, quindi

f è limitata inferiormente.

Scegliamo ora un punto dove il denominatore si annulla, ad esempio (π,π) e consideriamo la restrizione di f alla retta orizzontale $y=\pi$

$$f(x,\pi) = \frac{1}{2+\cos x+\cos \pi} = \frac{1}{1+\cos x}$$

Poichè $\lim\limits_{x\to\pi} f(x,\pi) = \lim\limits_{x\to\pi} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

otteniamo che f non è limitata superiormente.

10. La frontiera dell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 \le 4\}$ è

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 4\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

► (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$

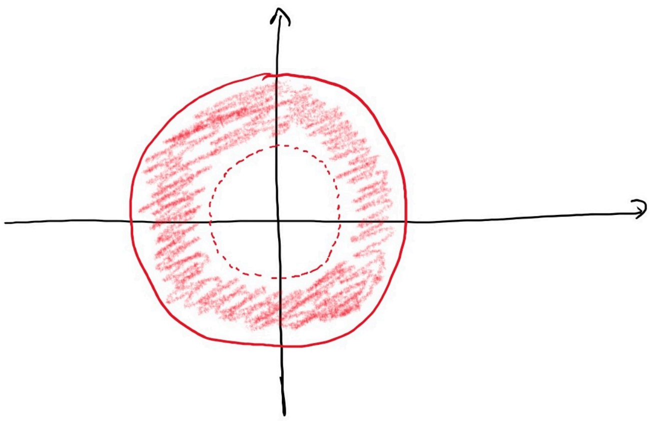
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$

Soluzione:

L'insieme è la corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2.

La frontiera è costituita dalle 2 circonferenze di equazione

$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.



Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 651667 10 gennaio 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	d
3	d
4	b
5	b
6	a
7	a
8	b
9	a
10	c

1. Il polinomio di Taylor al terzo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^x - \cos x$ è:

(a) $2 + x - x^2 + \frac{x^3}{6}$ ► (b) $x + x^2 + \frac{x^3}{6}$ (c) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (d) $1 - \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^3 x}{6}$

Soluzione:

$f(x) = e^x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$

$= \cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Poiché il polinomio di Taylor di ordine 3 è l'unico polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a 3 tale che $f(x) = p(x) + o(x^3)$ per $x \to 0$, otteniamo che

$p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6}$.

2. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = |x^3 - 10x^2| + 7x$ nel punto di ascissa $x = 1$ è

(a) $y = 16$ (b) $y = 24x + 16$ (c) $y = 16x - 16$ ▶ (d) $y = 24x - 8$

Soluzione:

$f(x) = |x^3 - 10x^2| + 7x$

Per $x = 1$ $x^3 - 10x^2 = 1 - 10 = -7 < 0$, quindi, per il teorema sulla permanenza del segno, in un intorno di $x = 1$, $x^3 - 10x^2 < 0$.

Ne segue che, in un intorno di $x = 1$

$f(x) = -x^3 + 10x^2 + 7x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 20x + 7$

$f(1) = -1 + 10 + 7 = 16$, $f'(1) = -3 + 20 + 7 = 24$

L'equazione della retta tangente è

$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 16 + 24(x-1) = 16 + 24x - 24 = 24x - 8$

3. $\lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\, dt =$

(a) $\frac{11}{4\sqrt{2}}$ (b) $+\infty$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ▶ (d) $\frac{7}{3\sqrt{2}}$

Soluzione:

$$\int \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{t}{t^2\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{1}{t^{3/2}}\,dt + \int \frac{1}{t^{5/2}}\,dt =$$

$$= -2\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\frac{1}{t\sqrt{t}} + c$$

$$\int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{3}\frac{1}{t\sqrt{t}}\right]_2^x = \frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\cancel{2}}{3}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{6+1}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t\,dt =$

(a) $+\infty$ ► (b) 1 (c) 0 (d) e

Soluzione:

Poiché $x \to +\infty$ possiamo considerare $x > 1$ quindi $\log x > 0$

e $x + \frac{1}{\log x} > x$.

Dal teorema della media integrale (l'integranda è continua)

esiste $z \in \left(x, x + \frac{1}{\log x}\right)$ t.c.

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \log z \cdot \left(\cancel{x} + \frac{1}{\log x} - \cancel{x}\right) = \frac{\log z}{\log x}$$

Avremo quindi
$$\frac{\log x}{\log x} < \frac{\log z}{\log x} < \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(x + \frac{1}{\log x}\right)}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x \log x}\right)}{\log x} = 1$$

e ovviamente $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log x} = 1$. Dal teorema dei

carabinieri otteniamo quindi che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log z}{\log x} = 1 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = 1.$$

In alternativa si poteva calcolare esplicitamente

l'integrale ed eseguire il limite:

$$\int_x^{x+\frac{1}{\log x}} \log t \, dt = \Big[t \log t - t\Big]_x^{x+\frac{1}{\log x}} = \cdots\cdots$$

5. La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin^2 t}$

(a) ha un asintoto orizzontale e non ha asintoti verticali

► (b) non ha nessun tipo di asintoto

(c) ha un asintoto verticale e non ha asintoti orizzontali

(d) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

Soluzione:

$$F(x)=\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin^2 t} \qquad F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}+\sin^2 t}$$

valutiamo quindi la convergenza dell'integrale improprio.

Poniamo $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}+\sin^2 t}$ e osserviamo che $f(t)\geq 0$ $\forall\, t\in(0,+\infty)$. Scegliamo $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ e utilizziamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sin^2 t}=1.$$

Poiché $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}=+\infty$ otteniamo che $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt=+\infty$

quindi $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ e non c'è asintoto orizzontale.

Osserviamo ora che F è continua in $(0,+\infty)$ quindi potrebbe esserci un asintoto verticale solo in $x=0$.

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\int_1^0 f(t)\,dt=-\int_0^1 f(t)\,dt$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\sin t=t+o(t^2)$ per ottenere che, per $t\to0$

$$f(t)=\frac{1}{t^{1/2}+\left(t+o(t^2)\right)^2}=\frac{1}{t^{1/2}+t^2\left(1+o(t)\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{t^{1/2}}\,\frac{1}{1+t^{3/2}\left(1+o(t)\right)^2}$$

Scegliamo quindi $g(t) = \frac{1}{t^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^{1/2}}}{\cancel{t^{1/2}}} \frac{1}{1+t^{3/2}(1+o(t))^3} = 1 .$$

Poiché $\int_0^1 g(t)\,dt$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge, quindi $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ è finito, quindi F non ha asintoti verticali.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

► (a) diverge positivamente (b) converge (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

La funzione $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ è definita e continua $\forall x \in [0,+\infty)$. Osserviamo che $0 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$ quindi

$\frac{1}{1+\sin^2 x} \geq \frac{1}{2}$. Dato che $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\,dx = +\infty$, dal criterio del confronto, segue che $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = +\infty$.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\left(1-\cos(n\pi)\right)\right)^{n\cos(n\pi)} =$

► (a) 0 (b) 1 (c) non esiste (d) $+\infty$

Soluzione:

Poniamo $a_n = \left(n\left(1-\cos(n\pi)\right)\right)^{n\cos(n\pi)}$

e ricordiamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi

$a_n = \left(n\left(1-(-1)^n\right)\right)^{n(-1)^n}$.

Esaminiamo ora la sottosuccessione di indici pari

$a_{2n} = \left(2n\left(1-(-1)^{2n}\right)\right)^{2n(-1)^{2n}} = \left(2n(1-1)\right)^{2n} = 0$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$.

Vediamo ora gli indici dispari

$a_{2n+1} = \left((2n+1)\left(1-(-1)^{2n+1}\right)\right)^{(2n+1)(-1)^{2n+1}} = \left((2n+1)\cdot 2\right)^{-(2n+1)} =$

$= \dfrac{1}{\left(2(2n+1)\right)^{2n+1}}$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$.

Dato che le due sottosuccessioni saturano tutti gli indici

otteniamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

8. La serie $\sum_n \dfrac{5^n\left(n(-2)^n-1\right)}{2^n(n^3 5^n+1)}$

(a) diverge negativamente

► (b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \dfrac{5^n\left(n(-2)^n - 1\right)}{2^n\left(n^3 5^n + 1\right)}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{5^n(-2)^n\left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{2^n \cdot 5^n\left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)} = (-1)^n \frac{\cancel{10^n}\left(n - \frac{1}{(-2)^n}\right)}{\cancel{10^n}\left(n^3 + \frac{1}{5^n}\right)}$$

Dato che $n - \frac{1}{(-2)^n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la serie è a segni alterni.

Verifichiamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{n - \frac{1}{(-2)^n}}{n^3 + \frac{1}{5^n}} = \frac{n\left(1 - \frac{1}{n(-2)^n}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^3 5^n}\right)} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}}\right)$$

Osserviamo ora che $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n(-2)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$ quindi anche $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(-2)^n} = 0$. Allora, scegliendo $b_n = \frac{1}{n^2}$ otteniamo che $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1 - \frac{1}{n(-2)^n}}{1 + \frac{1}{n^3 5^n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

Dato che $\sum_n b_n$ converge, dal criterio del confronto asintotico, $\sum_n |a_n|$ converge, quindi $\sum_n a_n$ converge assolutamente.

9. La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{2 + \cos x + \cos y}$, nel suo insieme di definizione

► (a) è limitata inferiormente ma non superiormente

(b) non è limitata né inferiormente né superiormente

(c) è limitata

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{2+\cos x+\cos y}$$

Osserviamo che $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \cos y \le 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

quindi $2+\cos x+\cos y \ge 2-1-1=0$, ne segue che

$f(x,y)>0$ nel suo insieme di definizione, quindi

f è limitata inferiormente.

Scegliamo ora un punto dove il denominatore si annulla, ad esempio (π,π) e consideriamo la restrizione di f alla retta orizzontale $y=\pi$

$$f(x,\pi) = \frac{1}{2+\cos x+\cos \pi} = \frac{1}{1+\cos x}$$

Poiché $\lim_{x\to\pi} f(x,\pi) = \lim_{x\to\pi} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

otteniamo che f non è limitata superiormente.

10. Siano $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(x-y)$ e $v=(1,1)$. La derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ è

(a) 0 (b) $(x^2+y^2)\cos(x-y)$ ► (c) $2(x+y)\sin(x-y)$ (d) $2(x+y)$

Soluzione:

$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(x-y)$ $\qquad v=(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(x-y) + (x^2+y^2)\cos(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin(x-y) + (x^2+y^2)\cos(x-y)(-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1 =$$

$$= 2x\sin(x-y) + \cancel{(x^2+y^2)\cos(x-y)} + 2y\sin(x-y) - \cancel{(x^2+y^2)\cos(x-y)}$$

$$= 2(x+y)\sin(x-y)$$